

Elementarna matematika 2

Rješenja zadataka s vježbi

Peti tjedan

Zadatak 1. Neka su k_1 i k_2 kružnice koje se sijeku u točkama C i D , te neka je t pravac koji dira k_1 u točki A te dira k_2 u točki B . Dokažite da pravac CD raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

Rješenje. Neka je M sjecište pravca CD i dužine $\overline{AB}$. S jedne strane je potencija točke M na kružnicu k_1 upravo $|MA|^2$ dok je s druge strane potencija točke M na kružnicu k_1 $|MC| \cdot |MD|$. Analogno zaključujemo i za potenciju točke M na kružnicu k_2 odakle dolazimo do jednakosti

$$|MA|^2 = \text{Pot}_M(k_1) = |MC| \cdot |MD| = \text{Pot}_M(k_2) = |MB|^2.$$

Odakle slijedi da je $|MA| = |MB|$.

Napomena. Pravac na kojem leže sve točke sa jednakom potencijom na dvije različite kružnice zovemo *radikalna os*. U ovom zadatku je radikalna os pravac CD koji prolazi kroz sjecišta kružnica k_1 i k_2 .

□

Zadatak 2. Neka je ABC šiljastokutan trokut. Na visini iz vrha B istaknute su točke P i Q takve da je $\angle APC = \angle AQC = 90^\circ$. Analogno, na visini iz vrha C istaknute su točke R i S takve da je $\angle ASB = \angle ARB = 90^\circ$. Dokažite da je četverokut $PRQS$ tetivan.

Rješenje. Budući da je $\angle APC = \angle AQC = 90^\circ$ imamo da P i Q leže na kružnici s promjerom AC , označimo tu kružnicu s ω_B . Analogno R i S leže na kružnici ω_C s promjerom AB .

Neka je N_A nožište okomice iz A na stranicu BC .

Uočimo da su točke A i N_A presjek kružnica ω_B i ω_C odakle slijedi da je visina AN_A *radikalna os* kružnica ω_B i ω_C .

Zadnji korak je uočiti da ortocentar H leži na sjecištu visina, odnosno na sjecištu pravaca PQ , RS i AN_A . Posebno, budući da H leži na visini AN_A (*radikalnoj osi*) imamo da je potencija točke H na ω_B i ω_C jednaka, to jest imamo jednakost:

$$|HR| \cdot |HS| = \text{Pot}_H(\omega_B) = |HA| \cdot |HN_A| = \text{Pot}_H(\omega_C) = |HP| \cdot |HQ|.$$

Iz obrata teorema o potenciji točke zaključujemo da su P, Q, R i S konciklične točke (da leže na istoj kružnici).

□

Zadatak 3. Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut. Izrazite $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AF}$ pomoću $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.

Rješenje. Izrazimo sve vektore koristeći središte šesterokuta S .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC}, \\ \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SF}.\end{aligned}$$

S druge strane je $\overrightarrow{AD} = 2 \cdot \overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC}$. Konačno:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}, \\ \overrightarrow{AF} &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

□

Zadatak 4. Neka je T težište trokuta ABC . Dokažite da je $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} = 0$.

Rješenje. Neka su A', B', C' redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, i $\overline{AB}$. Budući da težište dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1 imamo da je

$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'}.$$

Sada želimo ciklički izraziti vektore $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ i $\overrightarrow{CC'}$ na sljedeći način $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$. Koristeći sve navedeno imamo sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} &= \frac{2}{3} \cdot (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) = \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0.\end{aligned}$$

Pritom posljednja jednakost vrijedi jer točke A, B i C čine trokut (zatvoreni ciklus od tri točke). □

Zadatak 5. Neka je $ABCDE$ peterokut i neka su K, L, M, N redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ i neka su P i Q polovišta stranica $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$. Dokažite da su pravci AE i PQ paralelni i da je $|AE| = 4|PQ|$.

Rješenje. Uočimo da je tvrdnja koju trebamo dokazati ekvivalentna tvrdnji $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{PQ}$. Način na koji dokazujemo zadatak je koristeći činjenicu da $\overrightarrow{PQ}$ možemo izraziti u 4 jednadžbe kojima odgovaraju 4 različita ciklusa:

$$\begin{aligned}A - K - P - Q - N - E - A &: \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{EA} = 0 \\ B - K - P - Q - L - B &: \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QL} + \overrightarrow{LB} = 0 \\ C - M - P - Q - L - C &: \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QL} + \overrightarrow{LC} = 0 \\ D - M - P - Q - N - D &: \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{ND} = 0\end{aligned}$$

Ono što nam preostaje je pozbrojiti sve četiri jednačbe te uočiti da su mnogi vektori mogu izraziti koristeći uvjete polovišta u obliku vektorskih jednakosti, na primjer da je K polovište $\overline{AB}$ znači da je $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB} = -\overrightarrow{BK}$, a da je P polovište od $\overline{KM}$ znači da je $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{MP}$.

Nakon zbrajanja vektorskih jednakosti koje dobivamo iz ciklusa i kraćenja jednakih vektora dobivamo :

$$4\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AE}.$$

□

Zadatak 6. Izrazite radijvektor $\overrightarrow{OP}$ preko radijevktora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, gdje je P polovište dužine $\overline{AB}$.

Neka je S točka takva da je $OASB$ paralelogram, po definiciji vektorskog zbroja znamo da je

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

Kako je P polovište segmenta $\overline{AB}$ a $OASB$ je paralelogram, to je P polovište segmenta $\overline{OS}$, odakle slijedi da je

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

Napomena: Općenito ako točka T leži na segmentu $\overline{AB}$ i dijeli segment u omjeru $|AT| : |TB| = p : q$ tada vrijedi

$$\overrightarrow{OT} = \frac{q}{p+q} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q} \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Najčešće se tvrdnja koristi u sljedežem obliku, ako znamo da je postoji $\lambda \in (0, 1)$ takav da je $\overrightarrow{AT} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ tada je

$$\overrightarrow{OT} = (1 - \lambda) \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}.$$

U skladu sa prethodnom formulom $\lambda = \frac{p}{p+q}$. Uočite da je ovo zapravo parametrizacija točaka na segmentu $\overline{AB}$. Zgodan način za pamtit ovu formulu je uočiti da za $\lambda = 0$ imamo $T \equiv A$ dok za $\lambda = 1$ imamo $T \equiv B$.

Zadatak 7. Izrazite radijvektor $\overrightarrow{OT}$ težišta T trokuta ABC preko radijevktora $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$.

Neka je A' polovište stranice $\overline{BC}$. Budući da težište T dijeli težišnicu $\overline{AA'}$ u omjeru $2 : 1$, to jest $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AA'}$. Po prethodnoj napomeni imamo da je

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{1+2} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{1+2} \overrightarrow{OA'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{OA'}.$$

Budući da je A' polovište od $\overline{BC}$, po prethodnom zadatku (i napomeni) imamo da je

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}.$$

Uvrštavajući prethodno u dobivenu jednakost za $\overrightarrow{OT}$ imamo da je:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} \right) = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

Zadatak 8. Neka je $ABCD$ paralelogram. Neka su M i N polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, te neka je P sjecište pravaca BN i CM . Nadalje, neka je T sjecište pravaca AP i BC . U kojem omjeru točka T dijeli dužinu $\overline{BC}$?

Rješenje. Neka nam je A ishodište svih radijvektora ($O \equiv A$), sve vektore u ravnini možemo izraziti preko $\vec{b} := \overrightarrow{AB}$ i $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ jer oni čine bazu. Najlakše određujemo vektore $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{m} = \overrightarrow{AM}$ i $\vec{n} = \overrightarrow{AN}$:

$$\vec{c} = \vec{b} + \vec{d}, \quad \vec{m} = \frac{\vec{b}}{2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{b}}{2} + \vec{d}.$$

Budući da je P sjecište dijagonala paralelograma $MBCN$ ono je ujedno i polovište od MC , po zadatku 6. imamo :

$$\vec{p} = \overrightarrow{AP} = \frac{\vec{m} + \vec{c}}{2} = \frac{3\vec{b}}{4} + \frac{\vec{d}}{2}.$$

Preostaje odrediti vektor $\vec{t} = \overrightarrow{AT}$. To možemo na dva načina, s jedne strane T leži na $\overline{BC}$, stoga postoji $\lambda \in (0, 1)$ takav da je

$$\overrightarrow{BT} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}. \quad (1)$$

S druge strane T leži na produžetku dužine $\overline{AP}$, stoga postoji $\mu > 1$ takav da je

$$\overrightarrow{AT} = \mu \cdot \overrightarrow{AP}. \quad (2)$$

Ovako smo dobili dvije nepoznanice λ i μ , no to nam ne predstavlja problem zato što nam je problem dvodimenzionalan, odnosno za svaku jednakost dvaju prikaza jednog vektora dobivamo dvije jednačbe. Naime, iz jednačbe (1) dobivamo prikaz

$$\vec{t} = \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AB} + \lambda \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \lambda \cdot \vec{d},$$

s druge strane iz jednačbe (2) dobivamo prikaz

$$\vec{t} = \overrightarrow{AT} = \mu \cdot \overrightarrow{AP} = \mu \cdot \left(\frac{3\vec{b}}{4} + \frac{\vec{d}}{2} \right) = \frac{3\mu\vec{b}}{4} + \frac{\mu\vec{d}}{2}.$$

Izjednačavanjem dvaju prikaza dobivamo dvije jednačbe

$$\begin{cases} 1 = \frac{3\mu}{4} & \implies \mu = \frac{4}{3}, \\ \lambda = \frac{\mu}{2} & \implies \lambda = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Konačno, je $\overrightarrow{BT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, dakle mora biti $\overrightarrow{TC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, stoga imamo da je

$$\frac{|TC|}{|BT|} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

□